Задача 1

Поняв принципы, по которым составлены таблички чисел, изображённые на рисунках, в первую табличку вставьте недостающее число, а из второй уберите лишнее число.

5	625	4
8	8	1
7	?	2
6	216	3

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{7}$
$3\frac{2}{7}$	$\frac{4}{11}$	0,(3)
0,125	$\frac{5}{13}$	0,(36)

Решение:

В первой табличке на каждой строке в первом столбце стоит основание степени, в третьем – показатель степени, во втором – результат возведения в степень. Таким образом, недостающее число 49.

Вторая табличка построена по-другому: в ней собраны пары равных чисел, но один раз число записано в виде десятичной дроби, другой раз – в виде обыкновенной. Таким образом, здесь лишнее число $^5/_{13}$.

Ответ: 49; $^5/_{13}$.

Задача 2

Девочка заменила каждую букву в своём имени её номером в русском алфавите. Получилось число 2011533. Как её зовут?

Решение:

Число 2011533 нужно разбить на однозначные и двузначные числа, чтобы соответствующая последовательность букв образовывала имя. Первое число не может быть 2, т.к. иначе второе число 0 или 01, чего быть не может. Значит, первое число 20, т.е. первая буква "Т". Последнее число 33, поскольку иначе два последних числа 53 и 3 или 3 и 3, но 53-й буквы в алфавите нет, а на "вв" не может кончаться имя девочки. Значит, последняя буква "я". На средние буквы осталось сочетание 115, т.е. либо 1, 1, 5, либо 11, 5, либо 1, 15. Этому соответствуют наборы букв "аад", "йд" и "ан". Отсюда видно, что девочку зовут Таня.

Ответ: Девочку зовут Таня.

Задача 3

Буратино правильно решил пример, но изрисовал свою тетрадь.

$$(\bullet\bullet + \bullet\bullet + 1) \times \bullet = \bullet\bullet\bullet$$

За каждым кружочком скрывается одна и та же цифра, отличная от нуля. Найдите эту цифру.

Решение:

Заменим кружочки буквой: (ХХ + ХХ + 1)×Х = ХХХ. Сократив на Х, получим ХХ + ХХ + 1 = 111, откуда ХХ = (111 – 1) : 2 = 55.

Ответ: 5.

Задача 4

В обыкновенном наборе домино 28 косточек. Сколько косточек содержал бы набор домино, если бы значения, указанные на косточках, изменялись не от 0 до 6, а от 0 до 12?

Решение:

В таком наборе было бы 13 "дублей". Число остальных косточек равно числу пар из 13 чисел, то есть 13·12 : 2 = 78.

Ответ: 91 косточка.

Задача 5

Три усталых ковбоя зашли в салун, и повесили свои шляпы на бизоний рог при входе. Когда глубокой ночью ковбои уходили, они были не в состоянии отличить одну шляпу от другой и поэтому разобрали три шляпы наугад. Найдите вероятность того, что никто из них не взял свою собственную шляпу.

Решение:

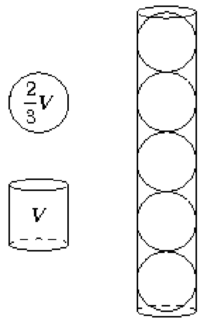
У ковбоев 6 различных вариантов взять шляпы. При этом только в двух вариантах из шести никто из ковбоев не возьмет свою шляпу, поскольку ковбой, который берет шляпу первым, может взять любую из двух шляп других ковбоев. У оставшихся же ковбоев выбора нет, так как шляпа одного из них по-прежнему никем не взята, и значит, он обязательно должен взять другую шляпу.

Таким образом, искомая вероятность равна $^2/_6 = 1/3$.

Ответ: $1/3$.

Задача 6

Еще Архимед знал, что шар занимает ровно $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, в который он вписан (шар касается стенок, дна и крышки цилиндра). В цилиндрической упаковке находятся 5 стоящих друг на друге шаров. Найдите отношение пустого места к занятому в этой упаковке.



Решение:

Разделим упаковку на 5 цилиндров, в каждый из которых вписан шар. В каждом из цилиндров отношение пустого места к занятому есть $\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$. Значит, и во всей упаковке это отношение такое же, 1:2 .

Ответ: 1:2 .

Задача 7

120 одинаковых шаров плотно уложены в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Решение:

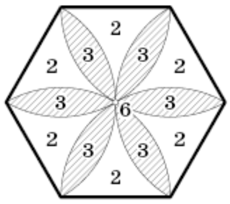
В верхнем слое – 1 шар, во втором – на два больше, то есть 3, в третьем – на 3 больше (6), и т. д.
Будем складывать полученные числа, пока не получим 120: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 = 120$.

Ответ: 36 шаров.

Задача 8

Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 3 м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем 3 м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна 7?

Решение:



Каждого студента "видят" 2, 3 или 6 храпометров (см. рис). Значит, 7 разбивается в сумму слагаемых, каждое из которых равно 2, 3 или 6. Легко видеть, что 7 представляется в виде такой суммы единственным образом: $7 = 3 + 2 + 2$. Количество слагаемых равно количеству студентов.

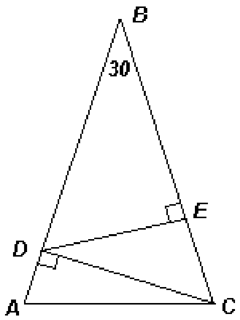
Ответ: 3 студента.

Задача 9

В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 30°, $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC.
Найдите BE.

Решение:

$DC = ½\, BC = 3$ (см. рис.). Кроме того, $\angle DCB = 90° - \angle DBC = 60°$, следовательно, $CE = ½\, DC = 1{,}5$. Таким образом, $BE = BC - CE = 4{,}5$.



Ответ: 4,5.

Задача 10

Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике размерами 199 × 991?

Решение:

Диагональ пересекает 199 + 991 - 1 = 1189 клеток.

Ответ: 1189

Задача 11

Найдите все пары обыкновенных правильных дробей таких, что одна из них со знаменателем 8, другая со знаменателем 13, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей из них была как можно меньше.

Решение:

Пусть первая дробь равна $^{x}/_{8}$, а вторая – $^{y}/_{13}$. Тогда разность между большей и меньшей из них равна $^{1}/_{104}\,|13x - 8y|$. В числителе полученной дроби стоит натуральное число. Поэтому она не может быть меньше $^{1}/_{104}$. А быть равной $^{1}/_{104}$ – может. Для этого нужно, чтобы числитель был равен единице. Это выполняется, если, например, $x = 3$, $y = 5$ (или $x = 5$, $y = 8$)

Ответ: $\frac{3}{8}$ *и* $\frac{5}{13}$ **или** $\frac{5}{8}$ *и* $\frac{8}{13}$

Задача 12

Сколько существует таких пар целых чисел x, y, заключённых между 1 и 1000, что $x^2 + y^2$ делится на 7.

Решение:

Число $x^2 + y^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y кратны 7. Количество целых чисел, заключённых между 1 и 1000 и кратных 7, равно 142 (поскольку $1000 = 142 \cdot 7 + 6$). Поэтому искомое число равно 142^2.

Ответ: $142^2 = 20164$ пар.

Задача 13

Сколькими способами можно переставить числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?

Решение:

Рядом с числом 1 может стоять только 2, поэтому 1 стоит с краю. Допустим, что 1 стоит в начале. Тогда следующее число – 2, следующее – 3 (других чисел рядом с 2 быть не может), следующее – 4 и т. д. Получаем расстановку 1, 2, ..., 99, 100.

Если же 1 стоит в конце, то аналогично однозначно восстанавливается расстановка 100, 99, ..., 2, 1.

Ответ: Двумя способами.

Задача 14

Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встаёт и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

Решение:

Оценка. Все стулья одновременно занять невозможно, так как в тот момент, когда сядет человек на последний незанятый стул, один из его соседей встанет. Следовательно, одновременно сидящих может быть не больше чем 11.

Пример. Покажем, как посадить 11 человек. Пронумеруем стулья числами от 1 до 12. Первый стул занять легко. Второй стул займем в два этапа. На первом этапе человек садится на третий стул, а на втором этапе посадим человека на второй стул, а сидящий на третьем стуле встанет. Дальше действуем аналогично: если заняты стулья с номерами от 1 до k, то сначала посадим человека на стул с номером $k + 2$, а затем посадим на стул с номером $k + 1$, освобождая при этом стул с номером $k + 2$. После того как эта операция будет проделана для всех k от 1 до 10, стулья с номерами от 1 до 11 будут заняты, а двенадцатый стул – свободен.

Ответ: 11.

Задача 15

Пройдя $^4/_9$ длины моста, пешеход заметил, что его догоняет машина, еще не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил свое движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и пешехода.

Решение:

Из условия следует, что время, которое требуется машине, чтобы подъехать к мосту, равно времени, которое требуется пешеходу, чтобы пройти $^4/_9$ моста. Следовательно, если пешеход продолжит движение, то к моменту въезда машины на мост, он пройдет $^8/_9$ моста. Значит, за то время, пока машина проезжает мост, пешеход успевает пройти его девятую часть, поэтому скорость машины в 9 раз больше скорости пешехода.

Ответ: 9.

Задача 16

На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за 1 день, а стадо из 37 слонов – за 5 дней.
За сколько дней выпьет озеро один слон?

Решение:

37 слонов за пять дней выпивают столько же, сколько $37 \cdot 5 = 185$ слонов за один день. Разница в два слона объясняется тем, что за четыре лишних дня из ключей "натекает" столько воды, сколько два слона выпивают за день. Таким образом, ключи восполняют за день половину дневной порции слона. А в озере (без ключей) 182,5 дневных порций слона. Один слон половину дня пьет воду "из озера", а половину – "из ключей". Поэтому ему понадобится $182{,}5 \cdot 2 = 365$ дней.

Ответ: За 365 дней.