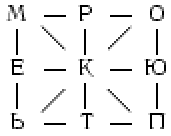
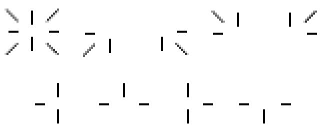
Задача 1

Попробуйте прочесть слово, изображённое на рис. 1, пользуясь ключом (см. рис. 2).





Решение:

Ключ показывает, какие именно стрелки отходят из того места, где стоит буква, которую мы должны выбрать. В результате прочитывается слово КОМПЬЮТЕР.

Ответ: КОМПЬЮТЕР.

Задача 2

Дано трехзначное число АВВ, произведение цифр которого — двузначное число АС, произведение цифр этого числа равно С (здесь, как в математических ребусах, цифры в записи числа заменены буквами; одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Определите исходное число.

Решение:

Из условия задачи видно, что $A\ C = C$; тогда $A = 1$ и $B\ B = 10 + C$, где C — цифра. Последнее уравнение имеет единственное решение $B = 4$, $C = 6$. Значит, искомое число 144.

Ответ: 144.

Задача 3

В. треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

Решение:

Пусть длина третьей стороны равна n. По неравенству треугольника $3,14 - 0,67 < n < 3,14 + 0,67$. Так как n — целое число, то $n = 3$.

Ответ: **3**

Задача 4

На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили ещё по точке. Такое "уплотнение" повторили ещё дважды (всего 3 раза). В результате на прямой оказалось отмечено 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

Решение:

Если (до уплотнения) было отмечено n точек, то после уплотнения будет отмечено $2n - 1$ точек (из которых n старых и $n - 1$ новая). Если после уплотнения получилось k точек, то $2n - 1 = k$ или $n = (k + 1)/2$. Таким образом, до последнего уплотнения было $(113 + 1)/2 = 57$ точек, до второго — $(57 + 1)/2 = 29$ точек и в самом начале — $(29 + 1)/2 = 15$ точек.

Ответ: 15 точек.

Задача 5

Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок.

Решение:

Пусть первая цифра кода x, а вторая y. Тогда само число записывается как $10x + y$, а условие задачи можно записать уравнением $(x + y) + x \cdot y = 10x + y$. Следовательно, $x \cdot y = 9x$.

Так как код — двузначное число, то x не равно 0, а значит, $y = 9$. При этом x можно взять любым, кроме 0.

Ответ: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

Задача 6

На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

Решение:

Меридианы делят глобус на 24 части (дольки), а параллели делят каждую дольку на $17 + 1 = 18$ частей. Всего $18 \cdot 24 = 432$ части.

Ответ: На 432 части.

Задача 7

Сколькими способами можно разложить девять орехов по трём карманам? (Карманы разные, а орехи одинаковые, карманы могут быть пустыми)

Решение:

Решение 1. В первый карман мы можем положить любое число орехов от 0 до 9. В каждом из этих 10 случаев подсчитаем, сколько орехов можно положить во второй карман; например, если в первый карман положен один орех, то во второй можно положить любое число орехов от 0 до 8 – всего 9 способов. Если мы определили, сколько орехов кладем в первые два кармана, то число орехов в третьем определяется однозначно. Поэтому общее число способов равно
$10 + 9 + 8 + ... + 1 + 0 = 55$.

Решение 2. Метод шаров и перегородок. Шаров 9, перегородок - 2, т.к. в карманах может быть пусто, то получаем последовательность из 9-ти нулей и 2-ух единиц. Считаем сколькими способами мы можем составить такие последовательности: $C_{11}^2 = 55$.

Ответ: $C_{11}^2 = 55$ **способами.**

Задача 8

Какое число нужно вычесть из числителя дроби $^{537}/_{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить $^{1}/_{9}$?

Решение:

Сумма числителя и знаменателя не изменится, если из одного из них вычесть, а ко второму – прибавить одно и то же число. Поскольку эта сумма равна 1000, то дробь перед сокращением должна быть $^{100}/_{900}$, а чтобы её получить, надо отнять и, соответственно, прибавить число 437.

Ответ: 437.

Задача 9

Дано число: 123456789101112... . Какая цифра стоит на 2000-м месте?

Решение:

Найдем, с какого момента в десятичную запись данного числа начнут входить трехзначные числа: $2000 - 9 \cdot 1 - 90 \cdot 2 = 1811$.
$1811 : 3 = 603$ (остаток 2), то есть на 2000-м месте стоит вторая цифра 604-го по счету трехзначного числа. Это число — 703, поэтому искомая цифра — 0.

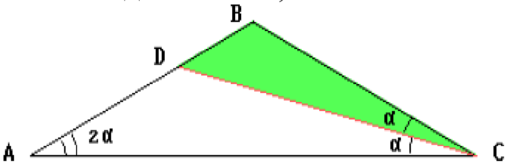
Ответ: Искомая цифра — 0.

Задача 10

ABC – равнобедренный треугольник с основанием *AC*, *CD* – биссектриса угла *C*, $\angle ADC = 150°$. Найдите $\angle B$.

Решение:

Пусть $\angle A = \angle C = 2\alpha$. Тогда $\angle DCA = \angle BCD = \alpha$. По условию $2\alpha + \alpha = 180° - 150°$, откуда $\alpha = 10°$. Следовательно, $\angle B = 180° - 4\alpha = 140°$.



Ответ:140°.

Задача 11

Вася получил список книг на летние каникулы (12 недель). Он поставил себе цель их прочитать и решил, что каждую неделю он будет читать одно и то же количество книг. Но каждую неделю Вася читал на одну книгу меньше запланированного, поэтому выполнил свой план на 3 недели позже, чем хотел. На сколько недель раньше срока Вася прочитал бы весь список, если бы каждую неделю читал на одну книгу больше, чем планировал?

Решение:

Первый способ ("арифметический"). За 12 недель Вася не успел прочитать 12 книг. Их он прочитает за 3 недели, то есть Вася в реальности читал по 4 книги в неделю, а планировал читать по 5 книг. Следовательно, в списке – 60 книг. Если бы он читал по 6 книг в неделю, то справился бы за 10 недель, то есть на две недели раньше срока.

Второй способ ("алгебраический"). Пусть Вася хотел читать по x книг в неделю, тогда в его списке – $12x$ книг. В реальности, он каждую неделю читал $x - 1$ книгу и потратил на это 15 недель, то есть в списке $15(x - 1)$ книг. Таким образом, $12x = 15(x - 1)$, откуда $x = 5$. Значит, в списке – 60 книг. Поэтому если читать по 6 книг в неделю, то хватит $60 : 6 = 10$ недель, то есть Вася прочитал бы весь список на $12 - 10 = 2$ недели раньше окончания каникул.

Ответ: На две недели.

Задача 12

Чтобы испечь сто блинов, маме требуется 30 минут, а Ане – 40 минут. Андрюша готов съесть 100 блинов за час. Мама с Аней пекут блины без остановки, а Андрюша непрерывно их поедает. Через какое время после начала этого процесса на столе окажется ровно сто блинов?

Решение:

Первый способ. Мама печёт сто блинов за полчаса, значит, за два часа она испечёт 400 блинов. Аня печёт сто блинов за сорок минут, поэтому за два часа она испечёт 300 блинов. Андрюша за эти два часа съест двести блинов. Поэтому, что через два часа на столе окажется $400 + 300 - 200 = 500$ блинов. Следовательно, для того, чтобы на столе оказалось сто блинов, потребуется времени в пять раз меньше, то есть $120 : 5 = 24$ минуты.

Второй способ. Производительность мамы равна ${}^{100}/_{30} = 3\frac{1}{3}$ блина в минуту. Производительность Ани равна ${}^{100}/_{40} = 2\frac{1}{2}$ блина в минуту. Производительность Андрюши при поедании блинов равна ${}^{100}/_{60} = 1\frac{2}{3}$ блина в минуту. За каждую минуту стараниями мамы, Ани и Андрюши на столе появляется $3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} = 4\frac{1}{6}$ блина. Следовательно, сто блинов появятся на столе за $100 : 4\frac{1}{6} = 24$ минуты.

Ответ: Через 24 минуты.

Задача 13

Каждый день, с понедельника по пятницу, ходил старик к синему морю и закидывал в море невод. При этом каждый день в невод попадалось не больше рыбы, чем в предыдущий. Всего за пять дней старик поймал ровно 100 рыбок. Какое наименьшее суммарное количество рыбок он мог поймать за три дня – понедельник, среду и пятницу?

Решение:

Оценка. Во вторник и в четверг старик поймал рыбок не больше, чем в понедельник и в среду, значит, за указанные три дня он поймал не меньше половины от 100, то есть не меньше 50 рыбок.

Пример. Если в каждый из первых четырёх дней старик ловил по 25 рыбок, а в пятницу не поймал ничего, то условия задачи выполнены, и за указанные три дня поймано ровно 50 рыбок.

Ответ: 50 рыбок.

Задача 14

В коридоре длиной 100 м постелено 20 дорожек общей длиной 1 км. Ширина каждой дорожки равна ширине коридора.

Какова максимально возможная суммарная длина незастеленных участков коридора?

Решение:

Оценка. Из 20 дорожек суммарной длиной $1000 = 20 \cdot 50$ м длина хотя бы одной не меньше 50 м. Таким образом, даже одна из дорожек покрывает не меньше 50 м.

Пример. Возьмём 20 дорожек по 50 м и положим их точно друг на друга.

Ответ: 50 м.

Задача 15

Найдите какое-либо натуральное число, меньшее ста, которое можно представить в виде суммы двух квадратов различных натуральных чисел двумя различными способами?

Решение:

Например, $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ или $85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$.

Ответ: 65 или 85 или другие числа, которые надо проверять.

Задача 16

Найдите возможные значения знаменателя обыкновенной дроби вида $^1/_m$, которая представляется чисто периодической десятичной дробью с двумя цифрами в периоде.

Решение:

$\frac{1}{m} = \overline{0,(ab)}$ $a \neq b$, умножим на 100 $\frac{100}{m} = \overline{ab,(ab)}$.

Вычтем из второго равенство первое: $\frac{99}{m} = \overline{ab}$, получаем делители числа 99, не являющиеся делителями числа 9, (т.к. $a \neq b$)

Ответ: 11, 33, 99.