Первый тур (10 минут; каждая задача - 6 баллов) **команда________________**

1.1. Решите уравнение: $5\sqrt{x-3}+2\sqrt{x}+3x=21$.

1.1. *Ответ*: 4.

Действительно, $x=4$ — корень уравнения, что проверяется подстановкой. Других решений нет, так как в левой части уравнения записана возрастающая функция.

Первый тур (10 минут; каждая задача - 6 баллов) **команда**________________

1.2. Верно ли, что в неравных треугольниках против неравных сторон лежат неравные углы?

1.2. *Ответ*: нет, неверно.

Рассмотрим, например, два треугольника: один со сторонами 3, 4 и 5, а другой со сторонами 6, 8 и 10. Это неравные прямоугольные треугольники, в которых равные (прямые) углы лежат против неравных сторон.

Возможны и другие примеры, в частности, любая пара подобных, но не равных треугольников.

Первый тур (10 минут; каждая задача - 6 баллов) **команда________________**

1.3. На какую наибольшую степень числа 2 может делиться выражение $n^2+4n-33$ при целых значениях n?

1.3. *Ответ*: 2^2.

$n^2+4n-33=n(n+4)-33$. Так как числа n и $n+4$ имеют одинаковую четность, то исходное выражение делится на 2 тогда и только тогда, когда n — нечетное число. Подставив $n=2k-1$, получаем, что данное выражение равно $(2k-1)(2k+3)-33=4k^2+4k-36=4\ \ k^2+4k-36\ \ =$ $=4(k^2+k-9)=4(k(k+1)-9)$, а значит, оно делится на $4=2^2$. Так как k и $k+1$ — числа разной четности, то $k(k+1)-9$ – нечетное число. Поэтому на бóльшую степень двойки исходное выражение делиться не может.

Второй тур (15 минут; каждая задача - 7 баллов) **команда__________________**

2.1. Известно, что положительные числа a и b удовлетворяют неравенству: $\frac{1+ab}{a+b} < 1$. Докажите, что одно из этих чисел больше 1, а другое — меньше 1.

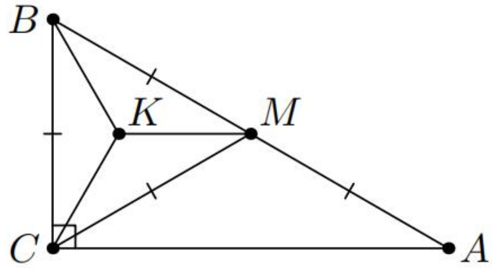
2.1. Так как $a+b>0$, то данное неравенство равносильно неравенству $1+ab < a+b \Leftrightarrow (1-a)-(b-ab) < 0 \Leftrightarrow (1-a)(1-b) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a<1, \\ b>1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a>1, \\ b<1 \end{cases}$, что и требовалось доказать.

Второй тур (15 минут; каждая задача - 7 баллов) **команда________________**

2.2. Можно ли разрезать прямоугольный треугольник с углом $30°$ на подобные непрямоугольные треугольники?

2.2. *Ответ*: да, можно.

Пусть ABC — данный треугольник, в котором $\angle BAC = 30°$. Проведем медиану CM, после чего точку K — центр равностороннего треугольника BCM соединим с его вершинами (см. рис.). Треугольники AMC, MKC, BKM и CKB — равнобедренные с углом $120°$ при вершине, поэтому являются подобными.



Второй тур (15 минут; каждая задача - 7 баллов) **команда________________**

2.3. На доске написано уравнение: «$\ldots x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$» без коэффициентов. Двое по очереди ставят коэффициенты (действительные числа). Второй игрок стремится к тому, чтобы хотя бы один корень уравнения был целым. Может ли первый ему в этом помешать?

2.3. *Ответ*: нет, не может.

Одна из возможных стратегий второго игрока: ставить коэффициенты, соответственно равные коэффициентам первого игрока, на «симметричные места». Уравнение $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ при любых a и b имеет целый корень: -1.

Другая возможная стратегия основана на том, что уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет корень 1, если $a + b + c + d = 0$. Второй игрок может добиться выполнения этого равенства, независимо от того, какими были три первых хода, выбрав оставшийся коэффициент противоположно сумме трех предыдущих. В частном случае можно, например, получить такое уравнение: $ax^3 - ax^2 + bx - b = 0$.

Третий тур (20 минут; каждая задача - 8 баллов) **команда________________**

3.1. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<\frac{99}{100}.$$

3.1. *Первый способ.* Заметим, что выполняются следующие числовые неравенства: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3}$; $\ldots$; $\frac{1}{99^2} < \frac{1}{98\cdot 99}$; $\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99\cdot 100}$. Кроме того, для любых натуральных k выполняется равенство $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Таким образом, $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2} < \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Докажем, что для любого натурального $n\geqslant 2$ справедливо неравенство: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$. Воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n=2$ получим верное неравенство $\frac{1}{2^2}<1-\frac{1}{2}$.

2) Предположим, что доказываемое неравенство верно при $n=k$, то есть $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{k}$. Докажем, что это неравенство будет верным и при $n=k+1$. Действительно, $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k+1}$, так как $\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

Следовательно, рассматриваемое неравенство выполняется для всех натуральных $n\geqslant 2$. Исходное неравенство получается из доказанного при $n=100$.

Третий тур (20 минут; каждая задача - 8 баллов) **команда________________**

3.2. На отрезке AB построена полуокружность, как на диаметре. На этой полуокружности выбраны произвольным образом точки P и Q. Точка C — пересечение прямых AP и BQ, а точка X — пересечение касательных к полуокружности в точках P и Q. Докажите, что прямые CX и AB перпендикулярны.

3.2. Пусть O - центр полуокружности. Для определённости, рассмотрим случай, когда H - точка пересечения прямых AQ и BP, расположена внутри полуокружности (см. рис.1а, б; для случая расположения точки H вне полуокружности доказательство аналогично). Так как $APB = \ BQA = 90^0$, то AQ и BP являются высотами треугольника ABC. Так как высоты треугольника пересекаются в одной точке, то $CH \perp AB$. Таким образом, для решения задачи достаточно доказать, что точка X лежит на прямой CH. Рассмотрим точку X_1 - середину отрезка CH и докажем, что она совпадает с точкой X.

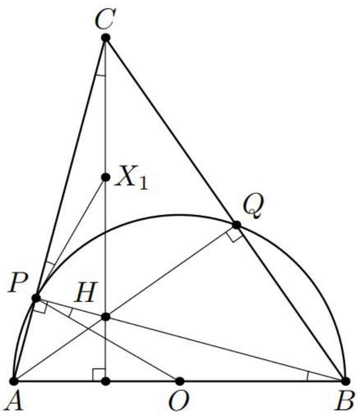


Рис.1 а

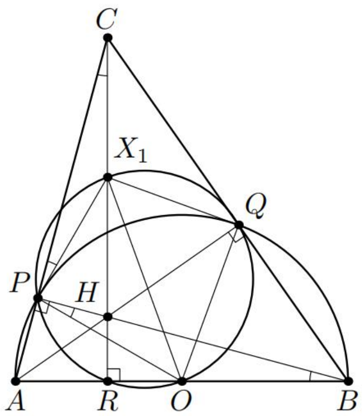


Рис.1 б

Первый способ. Так как PX_1 — медиана прямоугольного треугольника CPH, проведенная к его гипотенузе (см. рис. 1 а), то $\angle X_1PB = 90^\circ - \angle X_1PC = 90^\circ - \angle X_1CP = \angle PAB$. При этом, $\angle PAB$ — вписанный и опирается на дугу BP. Следовательно, X_1P — касательная к данной полуокружности. Аналогично доказывается, что X_1Q — также касательная к полуокружности.

Второй способ. Рассмотрение окружности 9-ти точек (рис. 1б).

Третий тур (20 минут; каждая задача - 8 баллов) **команда________________**

3.3. Таблица 5×5 заполнена числами 1, 2, ..., 25, причем любые два последовательных числа записаны в соседних (имеющих общую сторону) клетках. Какое наибольшее количество простых чисел может оказаться в одном столбце?

3.3. *Ответ*: 4.

Раскрасим клетки данной таблицы в шахматном порядке. Из условия следует, что в клетках одного цвета будут стоять нечетные числа, а в клетках другого цвета — четные. Следовательно, в любых двух соседних клетках стоят числа разной четности.

17	18	19	20	21
16	15	14	13	22
9	10	11	12	23
8	1	2	3	24
7	6	5	4	25

Рис. 1

Таким образом, в любом столбце должно быть не менее двух четных чисел, поэтому простых чисел в столбце не более четырех, среди которых обязательно должно быть число 2.

Одна из возможных расстановок, удовлетворяющих условию задачи, приведена на рис. 1 (четыре простых числа — в третьем столбце).

Несложно также доказать, что для раскраски, приведенной в таблице, четные числа стоят в клетках белого цвета, но для решения задачи это не требуется.

Четвёртый тур (20 минут; каждая задача - 9 баллов) команда________________

4.1. Решите уравнение:

$$\left(\frac{x^3+x}{3}\right)^3+\frac{x^3+x}{3}=3x.$$

4.1. *Ответ*: 0; $\pm\sqrt{2}$.

Первый способ. Пусть $y=\dfrac{x^3+x}{3}$, тогда получим систему уравнений: $\begin{cases} y^3+y=3x, \\ x^3+x=3y. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$(y-x)\left(y^2+xy+x^2\right)+y-x=3(x-y)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y-x)\left(y^2+xy+x^2+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=x, \\ y^2+xy+x^2=-4. \end{array}\right.$$

В первом случае получим уравнение $x^3+x=3x$, корнями которого являются числа 0 и $\pm\sqrt{2}$. Уравнение $y^2+xy+x^2=-4$ решений не имеет, так как неполный квадрат любых двух чисел принимает только неотрицательные значения.

К такому же результату можно прийти, если сразу указать, что $x=0$ является корнем данного уравнения, а в случае, когда $x\neq 0$ и $y\neq 0$ вместо вычитания уравнений полученной системы разделить одно из них на другое.

Второй способ. Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{\left(\frac{x^3+x}{3}\right)^3+\frac{x^3+x}{3}}{3}=x.$$

Тогда его можно записать в виде $f(f(x))=x$, где $f(x)=\dfrac{x^3+x}{3}$. Полученное равенство $f(f(x))=x\Leftrightarrow f(x)=f^{-1}(x)$ означает, что функцией, обратной к $f(x)$ является она сама. Графики взаимно обратных функций, построенные в одной системе координат, симметричны относительно прямой $y=x$, при этом, так как функция $f(x)$ является возрастающей (сумма возрастающих функций), то пересекаться эти графики могут только на указанной прямой. Следовательно, корнями исходного уравнения являются только корни уравнения $f(x)=x$, а именно, числа 0 и $\pm\sqrt{2}$.

Четвёртый тур (20 минут; каждая задача - 9 баллов) **команда________________**

4.2. Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла ABC. Найдите площадь этого четырехугольника, если $BD = 6$ см, $\angle ABC = 60°$.

4.2. *Ответ*: $9\sqrt{3}$ см^2.

Так как равные дуги окружности стягиваются равными хордами, то в данном четырехугольнике $ABCD$ $AD = DC$ (см. рис. 1). Рассмотрим поворот с центром D на угол ADC по часовой стрелке. При таком повороте образами точек A и B являются точки C и B' соответственно, то есть, образом треугольника ABD является равный ему треугольник $CB'D$. Так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle BCD + \angle BAD = 180°$, значит точки B, C и B' лежат на одной прямой. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ и треугольник BDB' — равновелики. Так как в треугольнике BDB': $DB' = DB = 6$ см; $\angle B' = \angle B = 30°$, то $S_{ABCD} = S_{\triangle BDB'} = = \frac{1}{2} BD \cdot B'D \cdot \sin 120° = 9\sqrt{3}$.

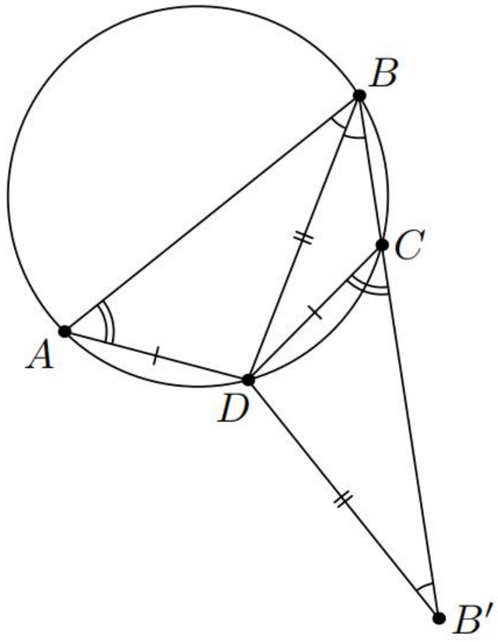


Рис. 1

Четвёртый тур (20 минут; каждая задача - 9 баллов)   команда________________

4.3. Из бесконечной последовательности $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots$ выберите шесть чисел, которые составляют арифметическую прогрессию.

4.3. *Ответ*: например, $\frac{1}{720};\ \frac{1}{360};\ \frac{1}{240};\ \frac{1}{180};\ \frac{1}{144};\ \frac{1}{120}$.

Рассмотрим последовательность дробей $\frac{a_1}{P};\ \frac{a_1+d}{P};\ \frac{a_1+2d}{P};\ \ldots;\ \frac{a_1+(n-1)\,d}{P}$, которая является арифметической прогрессией с разностью $\frac{d}{P}$. Для того, чтобы эти дроби входили в заданную бесконечную

последовательность необходимо и достаточно, чтобы знаменатель P был кратен каждому из числителей.

Пусть $a_1 = d = 1$, тогда число P кратно каждому из чисел: $1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Таким образом, для того, чтобы выбрать n чисел, удовлетворяющих условию, достаточно выбрать $P = n!$ В нашем случае выбраны числа: $\frac{1}{6!};\ \frac{2}{6!};\ \frac{3}{6!};\ \frac{4}{6!};\ \frac{5}{6!}$ и $\frac{6}{6!}$.

Пятый тур (25 минут; каждая задача - 10 баллов) команда________________

5.1. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $x^2 + xy + y^2$, если $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$.

5.1. *Ответ*: наибольшее значение 3; наименьшее значение 0, 5.

Первый способ. 1) Воспользовавшись очевидным неравенством $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, получим, что $x^2 + xy + y^2 \leqslant \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \leqslant 3$. Равенство достигается, например, при $x = y = 1$.

2) Воспользовавшись очевидным неравенством $xy \geqslant -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, получим, что $x^2 + xy + y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geqslant \frac{1}{2}$. Равенство достигается, например, при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Второй способ. Из условия задачи следует, что существуют такие $a \in [1; \sqrt{2}]$ и $\alpha \in (-\pi; \pi]$, что $x = a\cos\alpha$; $y = a\sin\alpha$. Тогда $x^2 + xy + y^2 = a^2 + a^2 \sin\alpha\cos\alpha = a^2(1 + 0,5\sin 2\alpha)$. Так как $-1 \leqslant \sin 2\alpha \leqslant 1$, то наибольшее значение полученного выражения достигается при $a = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и равно 3, а наименьшее значение достигается при $a = 1$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ и равно 0,5.

Пятый тур (25 минут; каждая задача - 10 баллов) команда________________

5.2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне AD, причем $BM||CD$ и $CM||BA$. Найдите BC, если $AM = a$; $DM = b$.

5.2. *Ответ*: $BC = \sqrt{ab}$.

Первый способ. Из параллельности прямых BA и CM следует, что $\angle ABM = \angle BMC$, а из параллельности прямых BM и CD следует, что $\angle BMC = \angle DCM$ и $\angle AMB = \angle MDC$ (см. рис. 1 а). Кроме того, так как $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то $\angle BCM = 180° - \angle DCM - \angle DAB = 180° - (\angle ABM + \angle MAB) = \angle AMB$.

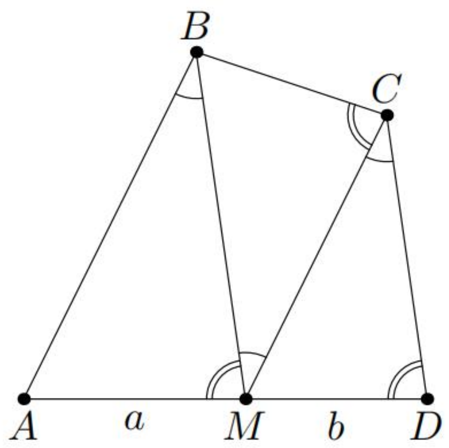


Рис.1 а

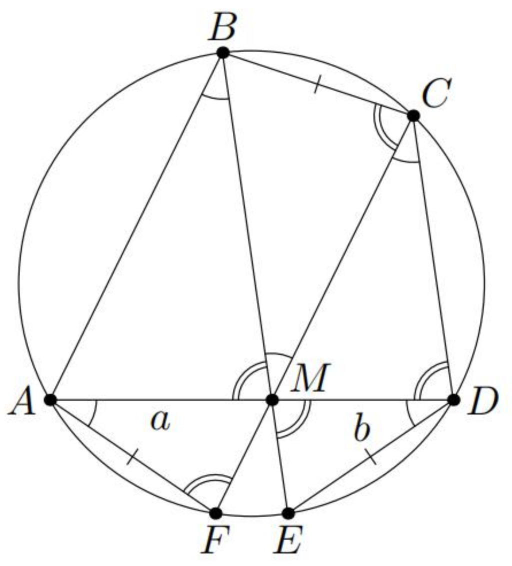
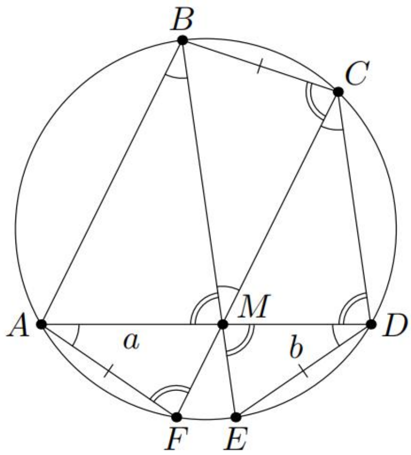


Рис. 1 б

Таким образом, треугольники ABM, BMC и MCD подобны (по двум углам). Из подобия первой пары треугольников следует, что $\frac{AM}{BC} = \frac{BM}{MC}$, а из подобия второго и третьего треугольников следует, что $\frac{DM}{BC} = \frac{MC}{BM}$. Перемножив эти равенства почленно, получим, что $\frac{AM}{BC} \cdot \frac{DM}{BC} = 1$, то есть $BC^2 = ab$.

Второй способ. Продолжим прямые BM и CM и отметим точки их вторичного пересечения с окружностью — E и F соответственно (см. рис. 1 б). Получим две вписанные трапеции: $ABCF$ и $BCDE$. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая, поэтому $BC = AF = DE$.

Используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу, и параллельность прямых BM и CD, получим: $\angle DAF = \angle FCD = \angle ABE = \angle ADE$ и $\angle AFC = \angle ADC = \angle AMB = \angle DME$. Тогда треугольники AFM и DME подобны (по двум углам), следовательно, $\dfrac{AM}{DE} = \dfrac{AF}{DM}$. Учитывая, что $BC = AF = DE$, получим: $BC^2 = ab$.



Пятый тур (25 минут; каждая задача - 10 баллов) **команда________________**

5.3. На плоскости отмечены вершины равностороннего треугольника. На каждом шаге разрешается отметить середину отрезка, если его концы также отмечены. Может ли на каком-то шаге оказаться отмеченным центр исходного треугольника?

5.3. *Ответ*: нет, не может.

Пусть отмечены вершины равностороннего треугольника ABC. Рассмотрим декартову систему координат на плоскости, начало которой точка O — середина стороны AC, ось абсцисс содержит сторону AC, а ось ординат проходит через вершину B, причем $B(0;1)$ (см. рис. 1). Тогда ординаты точек A и C равны нулю, а ордината центра исходного треугольника равна $\dfrac{0+1+0}{3}=\dfrac{1}{3}$.

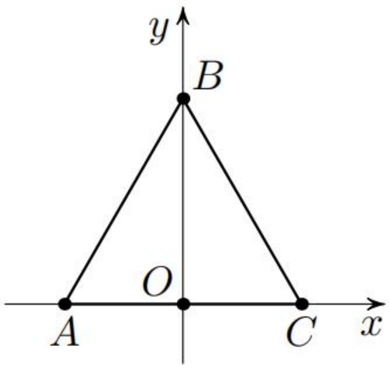


Рис. 1

На каждом шаге отмечается точка, ордината которой равна среднему арифметическому ординат концов отрезка. Поэтому ордината любой вновь отмеченной точки — рациональное число, записываемое обыкновенной дробью со знаменателем вида 2^n, где n — натуральное. Полученное противоречие показывает, что центр данного треугольника не может оказаться отмеченным.