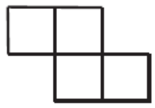
Заключительный этап
краевого математического турнира-конкурса «Квадратура круга»
2021/2022 учебный год

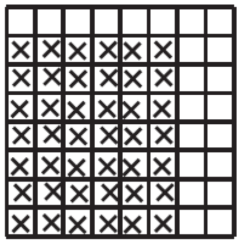
Математическая игра «Домино»

0–0. Сколькими способами Петя Смекалкин сможет расположить на шахматной доске (размер 8×8 клеток) четырёхклеточный многоугольник в виде буквы *Z* так, чтобы он располагался точно по клеткам доски и в пределах доски? Четырёхугольник можно поворачивать и переворачивать.



Ответ: 168 способами.

Решение: Дополним четырёхклеточный многоугольник двумя клетками до прямоугольника 2×3 и сначала найдём количество способов расположить на шахматной доске такой прямоугольник. Пусть его большая сторона горизонтальна. Тогда левая нижняя клетка прямоугольника может быть любой из клеток, отмеченных на рисунке крестиком. Имеем 6·7 = 42 положения. Столько же возможностей расположить прямоугольник так, чтобы его большая сторона была вертикальна. Итого, прямоугольник 2×3 может быть расположен на доске 2·42 = 84 способами. Остаётся заметить, что каждому расположению прямоугольника на доске соответствует ровно два положения искомого четырёхклеточного многоугольника (из прямоугольника надо убрать пару противоположных угловых клеток, а это делается двумя способами). Значит, четырёхклеточный многоугольник можно разместить 84·2 = 168 способами.



0–1. Самоходный каток для укатки дороги имеет ширину захвата, равную 1,2 м. Причем каждая следующая полоса прохождения перекрывает предыдущую на четверть ее ширины. Сколько времени понадобится, чтобы провести укатку участка шоссе длиной 250 м и шириной 6,5 м, если каток будет двигаться со скоростью 2,5 км/ч и на каждый разворот требуется 2 минуты?

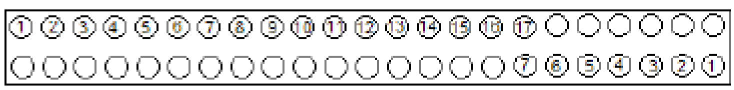
Ответ: 62 минуты

Решение: Так как следующая полоса перекрывает предыдущую на 0,25·1,2 = 0,3 м, то за одну «ходку» каток укатывает полосу шириной 1,2 – 0,3 = 0,9 м. Таких полос помещается на участке 7 (равно неполному частному от деления числа 6,5 на 0,9), и ещё остается полоска шириной 6,5 – 7·0,9 = 0,2 м. Поэтому, каток должен сделать 8 «ходок». На каждую из них он тратит 0,25 : 2,5 = 0,1 ч = 6 мин., тогда на 8 «ходок» – 48 минут. С учетом 7 разворотов искомое время равно 48 + 7 · 2 = 62 мин.

0–2. На эскалаторе в метро через равные промежутки с обеих сторон установлены лампы. Все лампы пронумерованы, начиная с 1. Слева – сверху вниз, а справа – снизу вверх. Петя Смекалкин, стоя на эскалаторе, с одной стороны увидел лампу с номером 7, а с другой – 17. Сколько ламп на эскалаторе?

Ответ: 46.

Решение: Из рисунка видно, что лампы с номерами от 1 до 16 на той стороне, где Петя увидел 17, вместе с лампами от 1 до 7 на той стороне, где Петя увидел 7, составляют ровно половину



всех ламп на эскалаторе. Значит, 16 + 7 = 23 – это половина всех ламп. Следовательно, всего 46 ламп.

0–3. В тот день, когда Петю Смекалкина поздравляли с днём рождения его брат и сестра, Петя сказал: «Смотрите, как интересно, я теперь вдвое старше брата и втрое старше сестры!» – «А ваш средний возраст 11 лет», – подхватил папа. Сколько лет исполнилось Пете?

Ответ: 18 лет.

Решение: По условию задачи можно составить уравнение. Пусть возраст Дети – x лет, тогда возраст сестры $\frac{x}{3}$, а брата – $\frac{x}{2}$. Имеем уравнение: $\frac{1}{3}\left(x+\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\right)=11$.

После решения этого уравнения получаем, что $x = 18$. Пете исполнилось 18 лет.

0–4. Килограмм свежей малины стоит 100 рублей. Килограмм малины, собранной ранее, среди которой есть и мятые ягоды, стоит 85 рублей. Килограмм мятой малины, пригодной только для компота, стоит 25 рублей. Сколько грамм мятой малины в килограмме малины, продаваемой за 85 руб.?

Ответ: 200.

Решение: Обозначим через a кг массу мятой малины в килограмме малины, собранной ранее. Тогда «целой» малины в этом килограмме малины будет $(1 - a)$ кг. Стоимость этого килограмма малины будет составлять $((1 - a)\cdot 100 + a\cdot 25)$ руб., что по условию равно 85 руб. Имеем уравнение: $(1 - a)\cdot 100 + a\cdot 25 = 85$. Отсюда, $a = 0{,}2$ (кг). Следовательно, в килограмме малины, продаваемой за 85 руб., содержится 200 г мятой малины.

0–5. За ужином Таня съела столько же пирожных, сколько и её дочка, а Маша в три раза больше, чем её дочка, причём каждая съела целое количество пирожных. Сколько пирожных съела Маша, если ужинало трое и было съедено 15 пирожных?

Ответ: 9.

Решение: Из условия следует, что Таня и Маша – родственники: одна из них является мамой другой, третья сидящая за ужином – дочка одной из них и внучка другой. Если Таня – мама, то Маша – дочка. Тогда Таня и Маша съели вместе в 3 + 3 = 6 раз больше пирожных, чем дочка Маши. Примем количество пирожных, съеденных дочкой Маши, за 1 часть, тогда количество пирожных съеденных Таней и Машей вместе, составляет 6 частей. Общее количество съеденных пирожных составляют 6 + 1 = 7 частей. Так как число 15 на 7 не делится, то в этом случае высказанное предположение неверно.

Если Маша – мама, то Таня – дочка. Тогда Маша съела пирожных в три раза больше, чем её дочка и в три раза больше, чем её внучка. Примем количество пирожных, съеденных Таней, за 1 часть, тогда количество пирожных, съеденных её дочкой, также составляет 1 часть, а количество пирожных, съеденных Машей, – 3 части. Тогда общее количество съеденных пирожных составляет 1 + 1 + 3 = 5 частей. На 1 часть приходится 15:5 = 3 пирожных, Маша съела $3\cdot 3 = 9$ пирожных.

0–6. Каждый из 10 гномов либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что каждый из них любит ровно один сорт мороженого: сливочное, шоколадное или фруктовое. Сначала Белоснежка попросила поднять руки тех, кто любит сливочное мороженое, и все подняли руки, потом тех, кто любит шоколадное мороженое – и половина гномов подняли руки, потом тех, кто любит фруктовое мороженое – и руку поднял только один гном. Сколько среди гномов правдивых?

Ответ: 4.

Решение: Гномы, которые всегда говорят правду, подняли руку один раз, а гномы, которые всегда лгут, – два раза. Всего было поднято 10 + 5 + 1 = 16 рук. Если бы все гномы сказали правду, то было бы поднято 10 рук. Если одного правдивого гнома заменить на одного лгуна, то число поднятых рук увеличится на 1. Так как было поднято 6 «лишних» рук, то 6 гномов солгали, а 4 сказали правду.

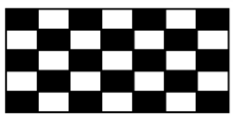
1–1. Почтальон получил для продажи конверты – 8 пачек по 100 штук. Покупатель попросил 10 пачек по 60 конвертов. Конверты перекладываются по одному, и на перекладывание одного конверта почтальон тратит 1 секунду. За какое наименьшее количество времени он может выполнить просьбу?

Ответ: за 4 минуты.

Решение: Заметим, что отложить 60 конвертов из 100 – это то же самое, что отложить 40, а 60 оставить. Пусть почтальон отложит по 40 конвертов из 6 пачек, (в них останется по 60 конвертов, а переложено будет 6·40 = 240 конвертов); причём сразу складывая их в 4 пачки по 60, тогда ему будет достаточно 240 секунд, то есть 4 минуты. Покажем, что быстрее это сделать не удастся. Пусть почтальон смог сделать это менее, чем за 240 секунд. Тогда переложено менее 240 различных конвертов. Значит, есть не более 5 пачек из тех, в которых было по 100, содержащих по 60 конвертов, иначе было бы отложено не менее 240 конвертов. Также, образовалось не более 3 новых пачек по 60 конвертов. Значит, могло получиться не более 8 пачек по 60 конвертов. Противоречие.

1–2. Петя Смекалкин купил шоколадку, имеющую форму прямоугольника и состоящую из 35 «долек» (5 «полосок» по 7 «долек» в каждой). Петя успел съесть 4 угловые «дольки», когда к нему в гости пришли друзья. Чтобы угостить друзей, Смекалкин решил разделить оставшуюся часть шоколадки на кусочки по две «дольки» – по одному кусочку для каждого друга. Какое максимальное количество друзей сможет угостить Петя?

Ответ: 14 человек.



Решение: «Раскрасим» шоколадку в два цвета (шахматная раскраска). Все 4 угла получаются окрашенными в один цвет (например, черный). Тогда в том, что осталось – 14 черных клеток. Очевидно, любой кусочек из 2 долек занимает 1 черную клетку. Следовательно, больше 14 кусочков Петя Смекалкин сделать не сможет.

1–3. Петя Смекалкин производил наблюдения за погодой в течение N дней. При этом он обнаружил, что если утром был дождь, то вечером того же дня было ясно, а если вечером шел дождь, то утром того же дня было ясно. В течение всего периода наблюдений было 13 дождливых дней. По вечерам ясная погода была 9 раз, а по утрам 8 раз. Найдите N. (Считать, что каждое утро и каждый вечер фиксируется либо дождь, либо ясная погода).

Ответ: 15.

Решение: Ясных половинок дней (утро или вечер) всего 9 + 8 = 17, при этом 13 из них приходятся на дождливые дни. Остается 17 – 13 = 4 половинки на не дождливые дни. Значит, не дождливых дней было 2. Отсюда $N = 13 + 2 = 15$.

1–4. После проведения санитарной обработки на базе отдыха количество мух уменьшилось на 40%, а количество комаров – на 20%. В целом количество насекомых уменьшилось на 25%. Найдите, сколько процентов от общего числа насекомых составляли комары до санитарной обработки?

Ответ: 75%.

Решение: Пусть x – количество мух и y – количество комаров было до санитарной обработки, тогда после санитарной обработки осталось $0{,}6x$ комаров и $0{,}8y$ мух. Количество насекомых после санитарной обработки равно $0{,}6x + 0{,}8y$, что составляет 0,75 от $(x + y)$. Составим уравнение: $0{,}6x + 0{,}8y = 0{,}75(x + y)$, откуда $y = 3x$. Таким образом, до санитарной обработки количество комаров было в 3 раза больше, чем мух, значит, количество комаров от общего количества составляло 75%.

1–5. За круглым столом расселись 10 мальчиков и 15 девочек. Оказалось, что имеется ровно 5 пар мальчиков, сидящих рядом. Сколько могло получиться пар девочек, сидящих рядом? (Если мальчик образует пару и с соседом слева, и с соседом справа, – считаются обе пары. То же верно для девочек).

Ответ: 10 пар.

Решение. В группе из подряд сидящих мальчиков каждый, кроме самого правого, образует пару с соседом слева. Значит, в каждой группе число пар на 1 меньше числа мальчиков. Поэтому, общее число пар мальчиков меньше числа мальчиков на число групп. Следовательно, есть 5 групп мальчиков, и они перемежаются 5 группами девочек. Но, тогда число пар девочек равно 15 – 5 = 10.

1–6. Экспресс отходит через 6 минут после автобуса, и догоняет автобус через 24 минуты. Если бы скорость автобуса была вдвое меньше, через сколько минут после отхода экспресс догнал бы автобус?

Ответ: 4.

Решение: Обозначим скорость автобуса $v1$ (км/мин), скорость экспресса $v2$ (км/мин). По условию $\frac{v_1}{v_2} = \frac{24}{24+6} = \frac{4}{5}$. Если бы скорость автобуса была вдвое меньше, то отношение скоростей автобуса и экспресса равнялось бы $\frac{2}{5}$. Обозначим путь до встречи в этом случае S. Составим уравнение: $\frac{S}{v_2} + 6 = \frac{S}{\frac{2}{5}v_2}$, откуда $\frac{S}{v_2} = 4$ мин. Это и есть время, за которое экспресс догонит автобус.

2–2. Каждые 9 минут Петя Смекалкин зажигает одну свечку. Каждая свечка горит ровно 40 минут, а затем гаснет. Сколько свечек будет гореть через час после того, как Петя зажег первую свечку?

Ответ: 4

Решение. Обозначим момент времени, когда Петя зажег первую свечу за 0. Нам нужно узнать, сколько свечей будет гореть через 60 минут. Петя будет зажигать свечи в 9, 18, 27, 36, 45 и 54 минуты. Заметим, что свеча, зажженная в 18 минут в 58 минут уже потухнет, а свечи, зажженные в 27, 36, 45 и 54 минуты еще будут гореть. Значит, через час будет гореть 4 свечи.

2–3. 10 часов тому назад от начала суток прошло столько же времени, сколько останется до конца суток через 2 часа. Сколько времени сейчас?

Ответ: 16 часов.

Решение: Между двумя равными промежутками времени в задаче пройдет 10+2=12 часов. В сутках 24 часа, поэтому каждый из рассматриваемых промежутков равен (24-12):2=6 часам. Поэтому сейчас 6+10=16 часов.

2-4. Сколько десятизначных чисел можно составить так, чтобы любые две соседние цифры отличались на единицу, если в их десятичной записи можно использовать только цифры 1, 2 и 3?

Ответ: 64 числа.

Решение. Рядом как с цифрой 1, так и с цифрой 3 может стоять только цифра 2, поэтому в любом из рассматриваемых десятизначных чисел каждая вторая цифра - двойка. На каждое из оставшихся пяти мест можно поставить либо единицу, либо тройку. Количество способов это сделать равно $2^5 = 32$. Кроме того, мы можем выбрать на каких местах будут стоять двойки – на чётных или на нечётных. Поэтому полученное количество нужно удвоить.

2–5. Тридцать студентов с пяти курсов придумали 40 задач для олимпиады, причем однокурсники – одинаковое количество задач, а студенты с разных курсов – разное. Сколько студентов придумало по одной задаче?

Ответ: 26.

Решение. Выберем пять студентов, по одному с каждого курса. Так как количество придуманных ими задач – различно, то этими студентами придумано не менее, чем $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ задач. Тогда, остальные 25 студентов придумали не более, чем $40 - 15 = 25$ задач. То есть, каждый из них придумал по одной задаче, следовательно, всего по одной задаче придумали 26 человек.

2–6. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один из математиков насчитал скамеек в три раза больше, чем другой. А сколько скамеек насчитал третий?

Ответ: 7.

Решение. Из условия задачи следует, что каждый из математиков в своих подсчетах учел все скамейки на станции ровно по одному разу, то есть в итоге они насчитали равное количество скамеек. Тогда, если после отправления поезда третий математик насчитал n скамеек, то второй должен был насчитать (n + 3) скамейки, а первый – (n + 8) скамеек. Таким образом, $\frac{n+8}{n+3} = 3$ или $\frac{n+3}{n} = 3$ или $\frac{n+8}{n} = 3$. Первые два уравнения не имеют натуральных корней, а решением третьего уравнения является $n = 4$. Следовательно, всего на станции – 19 скамеек, а математик, о котором спрашивается в задаче, – тот, кто при подъезде к станции насчитал 12 скамеек. Значит, при отъезде от станции он насчитал 7 скамеек.

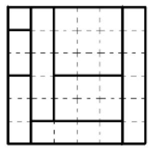
3–3. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр такое, что любое число из его шести подряд идущих цифр делится на 6.

Ответ: 9753186420

Решение. Т.к. все цифры, начиная с шестой, должны быть чётными, а данное число является самым большим из таких чисел и оно при этом удовлетворяет условию.

3–4. На какое наибольшее количество прямоугольников можно по линиям сетки разрезать квадрат 6×6 так, чтобы среди них не было одинаковых прямоугольников?

Ответ: 8 прямоугольников.



Решение. Если бы было не менее 9 различных прямоугольников, то их суммарная площадь была бы не менее 1+2+3+4+4+5+6+6+8=39, т.к. минимальные по площади 9 прямоугольников, умещающихся в квадрате 6×6, 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 1×5, 1×6, 2×3, 2×4. На рисунке пример разрезания на 8 различных прямоугольников.

3–5. В селе *А* проживает 100 детей, в селе *Б* – 99. Расстояние между ними 10 км. На полпути между ними живёт Петя Смекалкин. Школа построена так, что сумма расстояний, проходимых всеми этими 200 детьми по дороге в школу наименьшая из возможных. Найдите наибольшее возможное значение расстояния от школы до пункта *А*.

Ответ: 5 км.

Решение. Разобьём всех детей из *А* и 99 детей из *Б* на пары учеников из разных сёл. Сумма расстояний, проходимых до школы детьми из одной пары не менее 10 км, а сумма расстояний, проходимых до школы сотым ребёнком из *А* и Петей не менее 10/2=5 км, причём равенство в обоих случаях достигается, когда школа находится на отрезке от дома Пети и до *А*. Тогда сумма расстояний, проходимых всеми детьми до школы, будет наименьшей, и расстояние от школы до *А* будет не более 5 км, а максимум достигается в случае расположения школы в месте проживания Пети.

3–6. За круглым столом сидят 10 эльфов, перед каждым корзина орехов. Каждого спросили «Сколько орехов у двух твоих соседей вместе?» и, обходя по кругу, получили ответы 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190 и 200. Сколько орехов у эльфа, который ответил 160?

Ответ: 55.

Решение: Будем называть эльфов 1-м, 2-м и т. д. в порядке получения ответов. Нечетные номера сидят через одного. В их ответах число орехов каждого четного номера учтено дважды, поэтому сумма 110+130+150+170+190 = 750 равна удвоенному числу орехов у всех четных номеров. Значит, всего у четных 375 орехов. У 8-го и 10-го вместе 190 орехов, у 2-го и 4-го вместе 130 орехов. Значит, у 6-го 375–190–130=55 орехов.

4–4. Тётя Груша продаёт кабачки. Три кабачка она продаёт за 5 долларов, четыре кабачка – за 6 долларов, а пять кабачков – за 7 долларов. Ни в каком другом количестве тётя Груша кабачки не продаёт. Вчера она продала 100 кабачков и выручила за них 160 долларов. Сколько продаж совершила вчера тётя Груша?

Ответ: 30 продаж.

Решение. Давайте считать, что тетя Груша продает кабачки, но и огурцы. За 5 долларов – 3 кабачка и 2 огурца, за 6 долларов – 4 кабачка и 2 огурца, а за 7 долларов – 5 кабачков и 2 огурца. Тогда каждый фрукт стоит ровно 1 доллар. За 160 долларов она продаст 160 фруктов, из них 100 кабачков, значит, 60 огурцов. Заметим, что за любую продажу она продает ровно 2 огурца, значит, было 60:2 =30 продаж.

4–5. На турнир приехали школьники из разных городов. Один из организаторов заметил, что из них можно сделать 19 команд по 6 человек, и при этом еще менее четверти команд будут иметь по запасному игроку. Другой предложил сделать 22 команды по 5 или по 6 человек в каждой, и тогда более трети команд будут состоять из шести игроков. Сколько школьников приехало на турнир?

Ответ: 118.

Решение. Согласно первому условию, количество приехавших школьников равно $19\cdot6 + x$, где x – целое неотрицательное число и $x \le 4$. Тогда $19\cdot6 + x = 114 + x \le 118$. Из второго условия задачи следует, что искомое количество школьников равно $n\cdot6 + (22 - n)\cdot5$, где n – количество команд, состоящих из шести человек. По условию, $n \ge 8$, тогда $n\cdot6 + (22 - n)\cdot5 = n + 110 \ge 118$. Таким образом, на турнир приехало ровно 118 школьников.

4–6. Имеется кучка из нескольких конфет. Сначала Малыш съедает из этой кучки одну конфету, затем Карлсон съедает из этой кучки две конфеты, затем Малыш – три, Карлсон – четыре и так далее. Если в какой-то момент число оставшихся конфет меньше, чем должен съесть Малыш или Карлсон очередным ходом, то он доедает все конфеты. Оказалось, что Малыш съел 101 конфету. Сколько всего конфет было изначально?

Ответ: 211.

Решение. Заметим, что число конфет, съеденных Малышом, – это сумма первых нескольких нечетных чисел, то есть точный квадрат. Но в итоге Малыш съел 101 конфету, а значит, в свой последний ход Малыш доел оставшиеся конфеты. Значит, в этот момент могла остаться только одна конфета (иначе бы последним ходом Малыш съел не менее 20 конфет и значит, у него должно было уже быть не менее 10^2 конфет, что не так). Значит, Малыш съел от 1 до 19 конфет (только нечетные числа) и еще одну, а Карлсон съел количества конфет от 2 до 20. Значит, всего изначально было 1+2+. . .+19+20+1= 211 конфет.

5–5. В ряд лежат в некотором порядке семь монет (по одной с весами 1, 2, ... , 7 граммов). Для любой монеты (кроме крайних) известна сумма весов её соседей. У какого наибольшего количества монет можно гарантированно узнать вес?

Ответ: у трех монет.

Решение: Обозначим веса монет в порядке их расположения в ряду: $x_1, x_2, \dots, x_7$. Из условия задачи имеем уравнения: $x_1 + x_3 = a_2$, $x_2 + x_4 = a_3$, $x_3 + x_5 = a_4$, $x_4 + x_6 = a_5$,

$x_5 + x_7 = a_6$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 28$, где a_k – сумма весов соседей k-й монеты (k = 2, 3, 4, 5). Отсюда $x_4 = a_3 + a_5 – (28 – a_2 – a_6)$. Значит, вес четвертой монеты установить можно. Поскольку $x_2 = a_3 – x_4$, $x_6 = a_5 – x_4$, то и веса второй и шестой монет можно узнать. С другой стороны, если монеты, лежащие в ряду, имеют веса 2, 1, 5, 7, 3, 6, 4 или 4, 1, 3, 7, 5, 6, 2, тогда суммы весов соседей каждой монеты в обоих случаях одинаковы, следовательно, гарантированно установить веса первой, третьей, пятой и седьмой монет невозможно.

5–6. В кофейне встретились 55 индийцев и турок, каждый из которых пил чай либо кофе. Все индийцы говорят правду, когда пьют чай и обманывают, когда пьют кофе, а все турки – наоборот. На вопрос: "Вы пьете кофе?" – ответили "да" 44 человека, на вопрос: "Вы турок?" – 33 человека, а с утверждением: "На улице идет дождь" согласилось 22 человека. Сколько индийцев в кофейне пьют чай?

Ответ: 0.

Решение. Пусть $И_ч$, $И_к$ – число индийцев, пьющих чай и кофе, соответственно. Аналогично определим величины $Т_ч$ и $Т_к$. Тогда из первого вопроса следует, что $Т_ч+Т_к = 44$, а из второго вопроса следует $И_к+Т_к = 33$. Предположим, что «На улице идет дождь» – ложное утверждение. Тогда $И_к+Т_ч = 22$. Складывая первые два равенства и вычитая третье, получаем $2Т_к = 55$, противоречие. Значит, дождь идет, откуда $И_ч+Т_к = 22$. Складывая все три уравнения, и вычитая очевидное равенство $И_ч+И_к+Т_ч+Т_к = 55$, получаем $2Т_к = 44$, откуда $Т_к = 22$ и $И_ч = 0$.

6–6. У Мальвины были золотые колечки с массами 1 г, 3 г, 4 г, 6 г, 8 г, 9 г, 11 г, 12 г и 16 г. Алиса и Базилио украли по 4 кольца. При этом Алисе досталось втрое больше золота, чем Базилио. Какая масса может быть у оставшегося кольца? (Приведите все возможные варианты ответа).

Ответ: 6 г.

Решение: суммарная масса *всех украденных* колец делится на 4 нацело. А общая масса *всех* колец при делении на 4 даёт остаток 2. Поэтому остаться могло только кольцо массой 6 г. (Базилио при этом мог украсть кольца с массами 1, 3, 4 и 8 г – всего 16 г, а Алиса – кольца с массами 9, 11, 12 и 16 г – всего 48 г.)